

Ableitbare Funktionen. Ableitungen

Def. Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt.

° Die Funktion f ist genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ ableitbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert und endlich ist.}$$

° Die Funktion f hat genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ eine Ableitung, wenn der

$$\text{Grenzwert } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert (endlich oder unendlich).}$$

° Wenn die Ableitung existiert, dann wird sie $f'(x_0)$ bezeichnet.

° Die Funktion f ist genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ ableitbar, wenn die seitlichen

Grenzwerte $f'_l(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und $f'_r(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existieren endlich sind und gleich sind.

$$° \text{ Es gilt auch } f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

° Die Funktion f ist auf der Menge $E \subset D$ ableitbar, wenn sie in jedem Punkt aus E ableitbar ist.

$$° \text{ Die Funktion } f' : E \rightarrow \mathbb{R}, f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ hei\ss t Ableitung von } f \text{ auf } E.$$

Eig. Wenn eine Funktion an einer Stelle ableitbar ist, so ist sie an der Stelle stetig.

$$\text{Bew. Da } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \text{ gilt}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Geometrische Deutung der Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt und die Punkte

$A(x_0, f(x_0)), B(x, f(x))$. Das Verhältnis $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ kann als Anstieg der Geraden AB

gedeutet werden. $[AB]$ ist eine „Sehne“ des Grafen der Funktion f . Strebt x zu x_0 so wird aus

der Sehne eine Tangente. D.h. der Wert der Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist der Anstieg der Tangenten an den Grafen der Funktion in dem Punkt $A(x_0, f(x_0))$.

Die Gleichung der Tangenten ist: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Wenn f stetig ist in x_0 und $f'_l(x_0) = +\infty, f'_r(x_0) = -\infty$ (oder umgekehrt), dann heißt der Punkt $A(x_0, f(x_0))$ Umkehrpunkt des Grafen von f .

Wenn f stetig aber nicht ableitbar ist in x_0 und die seitlichen Ableitungen existieren und mindestens eine seitliche Ableitung endlich ist, dann heißt der Punkt $A(x_0, f(x_0))$ Eckpunkt des Grafen von f .

Ableitungsregeln

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$, auf ableitbare Funktionen und $k \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$, dh. „Die Ableitung der Summe ist die Summe der Ableitungen“;
- $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$, dh. Ein konstanter Faktor kann „ausgeklammert“ werden.
- $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $x \in D - \{r, g(r) = 0\}$;
- $[f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x) \cdot \ln f(x)}]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right]$, $f(x) > 0$
- Falls $f: D \rightarrow f(D)$ umkehrbar ist, dann ist die Ableitung der Inversen $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, wo $y_0 = f(x_0)$.

Die wichtigsten Formeln (es wird vorausgesetzt, dass die Funktionen und ihre Ableitungen definiert sind):

- $[f^n(x)]' = n \cdot f^{n-1}(x) \cdot f'(x)$, $n \in \mathbb{R}$
- $[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- $[a^{f(x)}]' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$, $a > 0, a \neq 1$

$$\circ [\sin f(x)]' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

$$\circ [\cos f(x)]' = -\sin f(x) \cdot f'(x)$$

$$\circ [\operatorname{tg} f(x)]' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

$$\circ [\operatorname{ctg} f(x)]' = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$$

$$\circ [\arcsin f(x)]' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$\circ [\arccos f(x)]' = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$$

$$\circ [\operatorname{arc} \operatorname{tg} f(x)]' = \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

$$\circ [\operatorname{arc} \operatorname{ctg} f(x)]' = -\frac{f'(x)}{1+f^2(x)}$$

Ableitungen höherer Ordnung

-Ableitung zweiter Ordnung : Es sei die ableitbare Funktion

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$. $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ ist die Ableitung zweiter Ordnung von

f an der Stelle x_0 . Eigentlich ist $f''(x_0) = (f')'(x_0)$.

- Ableitung höherer Ordnung:

$$f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0), n \in \mathbb{N}, f^{(0)} = f, f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'' = (f')'$$

-Regel von Leibniz: $(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^n C_n^k f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$

Extrempunkte

Def. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D$.

- x_0 ist eine *relative Maximumstelle* der Funktion f

$$\Leftrightarrow (\exists) U_{x_0} \text{ eine Umgebung von } x_0, \text{ s.d. } f(x_0) \geq f(x), (\forall) x \in U_{x_0}.$$

- x_0 ist eine *relative Minimumstelle* der Funktion f
 $\Leftrightarrow (\exists) U_{x_0}$ eine Umgebung von x_0 , s.d. $f(x_0) \leq f(x), (\forall) x \in U_{x_0}$
- $f(x_0)$ heißt *relatives Maximum(Minimum)* oder *Extremwert* der Funktion f
- $M(x_0, f(x_0))$ heißt *relativer Maximumpunkt(Minimumpunkt)* oder *Extrempunkt* der Funktion f

Bem. Eine Funktion kann mehrere relative Extremstellen haben.

Ein relatives Minimum kann größer sein als ein relatives Maximum.

Eigenschaften ableitbarer Funktionen

1. Lehrsatz von Fermat

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in I, I$ offenes Intervall, x_0 relative Extremstelle. Wenn f ableitbar ist in x_0 , dann ist $f'(x_0) = 0$.

Bem. \neg Der Kehrsatz ist falsch, dh. Wenn $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ ist Extremstelle.

\neg Die Nullstellen der Ableitung einer Funktion heißen kritische Punkte.

2. Lehrsatz von Rolle

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Rollsche Funktion (dh. f ist stetig auf $[a, b]$, ableitbar auf (a, b)) und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es mindestens einen Punkt $c \in (a, b)$ so, dass $f'(c) = 0$.

Geometrische Deutung: Wenn f eine Rollsche Funktion ist und $f(a) = f(b)$, so gibt es mindestens einen Punkt des Grafen der Funktion in dem die Tangente parallel zu der Ox-Achse ist.

Folgesätze

° Zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen der Funktion f (dh. Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$) liegt mindestens eine Nullstelle der Ableitung (dh. Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$)

° Zwischen zwei aufeinander folgenden Nullstellen der Ableitung f' einer Funktion f (dh. Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$) liegt höchstens eine Nullstelle der Funktion (dh. Lösung der Gleichung $f(x) = 0$).

°Reihe von Rolle: Wenn das Vorzeichen von f' in zwei aufeinander folgenden Nullstellen von f' gleich ist, so hat f dazwischen keine Nullstellen; ändert sich das Vorzeichen von f' in zwei aufeinander folgenden Nullstellen von f' so hat f dazwischen eine Nullstelle. Dh. die Anzahl der Nullstellen von f ist gleich der Anzahl der Vorzeichenänderungen von f' in den Nullstellen von f' .

3. Lehrsatz von Lagrange (Mittelwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Rollsche Funktion. Dann gibt es mindestens einen Punkt

$$c \in (a, b) \text{ so, dass } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Geometrische Deutung: Wenn f eine Rollsche Funktion ist, so gibt es mindestens einen Punkt $C(c, f(c))$ des Grafen der Funktion f in dem die Tangente parallel ist zu der Sehne AB , wo $A(a, f(a)), B(b, f(b))$.

Folgesätze

°Wenn $f' = 0$ auf dem Intervall I , dann ist f auf I konstant.

°Wenn $f' = g'$ auf dem Intervall I , dann ist $f(x) - g(x)$ auf I konstant.

° Monotonieintervalle einer Funktion:

- Wenn $f' > 0$ auf I , dann ist f streng wachsend auf I .

- Wenn $f' \geq 0$ auf I , dann ist f wachsend auf I .

- Wenn $f' < 0$ auf I , dann ist f streng fallend auf I .

- Wenn $f' \leq 0$ auf I , dann ist f fallend auf I .

°Wenn f ableitbar ist in x_0 und $f'(x_0 - 0) \cdot f'(x_0 + 0) < 0$, dann ist x_0 eine Extremstelle der Funktion f .

4. Lehrsatz von Cauchy

Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Rollsche Funktionen (dh. f und g sind stetig auf $[a, b]$, und ableitbar auf (a, b)) und $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es gibt

$$\text{mindestens einen Punkt } c \in (a, b) \text{ so, dass } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5. Lehrsatz von Dardoux

Wenn die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I ist ein Intervall) ableitbar ist auf I , dann hat ihre Ableitung $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Eigenschaft von Darboux.

6. Regeln von L'Hospital

(1) Für die Unbestimmtheit $\frac{0}{0}$

Seien die Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, und x_0 ein Häufungspunkt des Intervalls I ,

und : $1^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;

$2^\circ f$ und g sind ableitbar ist auf $I - \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$;

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

(2) Für die Unbestimmtheit $\frac{\infty}{\infty}$

Seien die Funktionen $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, und x_0 ein Häufungspunkt des Intervalls I ,

und : $1^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ (oder $-\infty$), $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ (oder $-\infty$);

$2^\circ f$ und g sind ableitbar ist auf $I - \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0, \forall x \in I - \{x_0\}$;

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

dann ist $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Die Rolle der zweiten Ableitung einer Funktion

Def. Eine auf einem Intervall definierte Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist auf I

(a) *konvex* wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und für jeden Wert $\lambda \in [0, 1]$ die Ungleichheit

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ gilt. (es genügt für $\lambda = \frac{1}{2}$ zu wählen)

(b) *konkav* wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und für jeden Wert $\lambda \in [0,1]$ die Ungleichheit $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ gilt.

Satz 1. Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I ableitbar ist, dann gelten die äquivalenten Aussagen:

1° f ist auf I konvex $\Leftrightarrow f'$ ist auf I wachsend

2° f ist auf I konkav $\Leftrightarrow f'$ ist auf I fallend

Satz 2. Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I zwei mal ableitbar ist, dann gelten die äquivalenten Aussagen:

1° f ist auf I konvex $\Leftrightarrow f'' \geq 0, \forall x \in I$

2° f ist auf I konkav $\Leftrightarrow f'' \leq 0, \forall x \in I$

Def. Sei die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ (im Inneren des Intervalls). x_0 heißt *Inflexionspunkt* (*Wendepunkt*) der Funktion (bzw. $M(x_0, f(x_0))$ Inflexionspunkt des Grafen), wenn f an der Stelle x_0 stetig ist, an der Stelle x_0 eine Ableitung hat und in x_0 die Konvexität ändert.

Satz 3. Wenn $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 im Inneren des Intervalls zwei mal ableitbar ist und x_0 ein Inflexionspunkt ist, dann gilt $f''(x_0) = 0$.